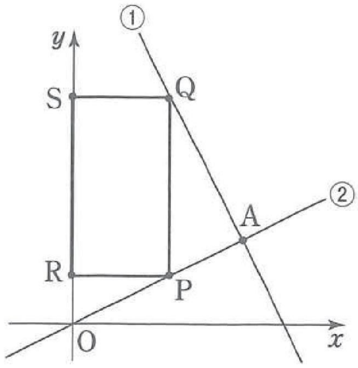
問題 2つの直線 $y=-2x+10$ …①, $y=\frac{1}{2}x$ …②があり, ①と②の交点をAとする。図のように線分OA上に点Pをとり, Pから $y$ 軸に平行に引いた直線と①との交点をQとし, また, P, Qから $x$ 軸に平行に引いた直線と $y$ 軸との交点をそれぞれ, R, Sとする。次の各問いに答えなさい。




(1) 点Aの座標を求めなさい。

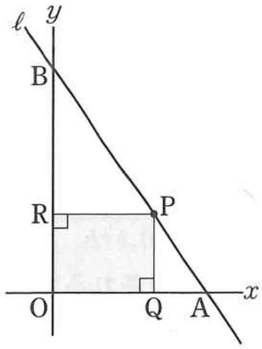
(2) 点Pの $x$ 座標を $t$ として線分PQの長さを $t$ の式で表しなさい。

(3) 四角形PQSRが正方形になるとき, 点Qの座標を求めなさい。

(東邦大附東邦高)

## 学習の基本　5　線分の長さと方程式(2)　～正方形～

**問題**　右の図で，直線 $\ell$ は関数 $y=-\frac{3}{2}x+5$ のグラフで，2点A，Bは，それぞれ直線 $\ell$ と $x$ 軸，$y$ 軸との交点である。線分AB上に点Pをとり，$x$ 軸，$y$ 軸に垂線PQ，PRをそれぞれひく。原点をOとして，次の問いに答えよ。




(1)　点Pの $x$ 座標を $t$ とするとき，線分PQの長さを $t$ を使って表せ。
(2)　四角形OQPRが正方形になるときの点Pの座標を求めよ。

**解**　(1)線分PQの長さは点Pの $y$ 座標に等しいから，$PQ=-\frac{3}{2}t+5$

(2)PQ＝PRとなればよい。PR＝$t$ であるから，$-\frac{3}{2}t+5=t$，$t=2$

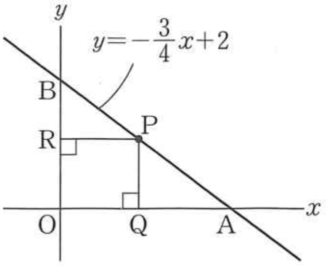
このとき，点Pの $y$ 座標は，$-\frac{3}{2}\times2+5=2$

**答**　(1)　$PQ=-\frac{3}{2}t+5$　　(2)　(2，2)

➡求める点の $x$ 座標を $t$ とおき，辺の長さについての方程式をつくる。

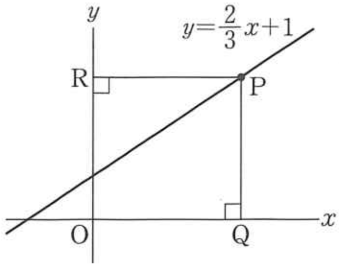
**13**　次の図で，四角形OQPRが正方形になるときの点Pの座標を求めよ。

□(1)



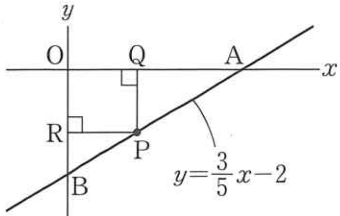

(点Pは線分AB上)

□(2)



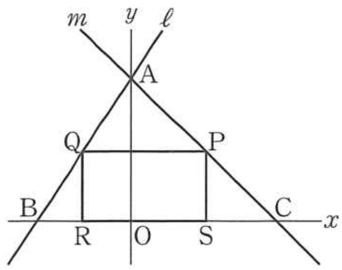

(点Pの $x$ 座標は正)

□(3)




(点Pは線分AB上)

★ **14**　右の図で，直線 $\ell$，$m$ はそれぞれ関数 $y=\frac{3}{2}x+7$，$y=-x+7$ のグラフであり，点Aは $\ell$，$m$ および $y$ 軸の交点，点B，Cはそれぞれ $\ell$，$m$ と $x$ 軸との交点である。点P，Qをそれぞれ線分AC，AB上，点R，Sを $x$ 軸上に，四角形PQRSが長方形になるようにとる。点Pの $x$ 座標を $t$ として，次の問いに答えよ。




□(1)　点Pの $y$ 座標を $t$ を使って表せ。

□(2)　点Qの $x$ 座標を $t$ を使って表せ。

□(3)　線分PQの長さを $t$ を使って表せ。

□(4)　四角形PQRSが正方形になるときの点Pの座標を求めよ。

**5** (1)OC=6, AB=5−2=3, 高さは4だから,

$\frac{1}{2}\times(6+3)\times4=18$

(2)①点Dの$y$座標を$p$とすると,

$\frac{1}{2}\times p\times4=18\times\frac{1}{2}$, $p=\frac{9}{2}$

②傾きは, $\left(2-\frac{9}{2}\right)\div(4-0)=-\frac{5}{8}$, 切片は$\frac{9}{2}$

**6** 点Fの$y$座標を$q$とすると, FA$=q-2$

OE=2だから, $\frac{1}{2}\times\{2+(q-2)\}\times4=18\times\frac{1}{3}$,

$q=3$

$m$の傾きは, $\frac{3-2}{4-0}=\frac{1}{4}$, 切片は2

## P80

**7** (1)$a=\frac{3}{2}$ (2)$b=5$

**8** (1)$y=3x-6$ (2)$y=-\frac{2}{3}x+6$

**9** (1)(12, 8) (2)(6, 4) (3)$y=\frac{4}{3}x-4$

解説

**7** (1)線分OBの中点は(4, 3)だから, $y=ax-3$に,

$x=4$, $y=3$を代入すると, $3=4a-3$, $a=\frac{3}{2}$

(2)線分BDの中点は(2, 4)だから, $y=-\frac{1}{2}x+b$

に, $x=2$, $y=4$を代入すると,

$4=-\frac{1}{2}\times2+b$, $b=5$

**8** (1)線分ACの中点(3, 3)を通る。

(2)線分ACの中点$\left(\frac{9}{2}, 3\right)$を通る。

**9** (1)点Aは点Oから$x$軸方向に9だけ移動した点だから, 点Bは点Cから$x$軸方向に9だけ移動した点である。よって, 点Bの座標は,

3+9=12より, (12, 8)

(2)線分ACと線分OBは平行四辺形OABCの対角線だから, それぞれの中点で交わる。

(3)2点P(3, 0), (6, 4)を通るから, 求める式は,

$y=\frac{4}{3}x-4$

## P81

**10** (1)8 (2)18 (3)7

**11** (1)−4 (2)4 (3)−6

**12** (1)$-\frac{1}{2}t+6$ (2)(6, 0)

(3)P$\left(\frac{24}{5}, 0\right)$, Q$\left(\frac{24}{5}, \frac{36}{5}\right)$

解説

**10** (2)P(9, −3), Q(9, 15)だから,

PQ=15−(−3)=18

(3)P(−4, 3), Q(3, 3)だから,

PQ=3−(−4)=7

**11** 点Pの$x$座標を$t$とする。

(1)$\frac{1}{2}t+12=10$, $t=-4$

(2)$(t+3)-(-2t+5)=10$, $3t-2=10$, $t=4$

(3)点Qの$y$座標は点Pの$y$座標に等しく,

$-\frac{4}{3}t-2$ 点Qの$x$座標は,

$-\frac{4}{3}t-2=\frac{1}{2}x+4$, $x=-\frac{8}{3}t-12$

PQ$=\left(-\frac{8}{3}t-12\right)-t=-\frac{11}{3}t-12$だから,

$-\frac{11}{3}t-12=10$, $t=-6$

**12** (1)QR$=\left(\frac{1}{4}t+6\right)-\frac{3}{4}t=-\frac{1}{2}t+6$

(2)$-\frac{1}{2}t+6=3$, $t=6$

(3)RP$=\frac{3}{4}t$だから, $-\frac{1}{2}t+6=\frac{3}{4}t$, $t=\frac{24}{5}$

点Qの$y$座標は, $\frac{1}{4}\times\frac{24}{5}+6=\frac{36}{5}$

## P82

**13** (1)$\left(\frac{8}{7}, \frac{8}{7}\right)$ (2)(3, 3) (3)$\left(\frac{5}{4}, -\frac{5}{4}\right)$

**14** (1)$-t+7$ (2)$-\frac{2}{3}t$ (3)$\frac{5}{3}t$ (4)$\left(\frac{21}{8}, \frac{35}{8}\right)$

解説

**13** 点Pの$x$座標を$t$とすると, PR$=t$

(1)PQ$=-\frac{3}{4}t+2$だから, $-\frac{3}{4}t+2=t$, $t=\frac{8}{7}$

(2)PQ$=\frac{2}{3}t+1$だから, $\frac{2}{3}t+1=t$, $t=3$

(3)PQ$=0-\left(\frac{3}{5}t-2\right)=-\frac{3}{5}t+2$だから,

$-\frac{3}{5}t+2=t$, $t=\frac{5}{4}$

**14** (1)$y=-x+7$に$x=t$を代入して, $y=-t+7$

(2)点Qの$y$座標も$-t+7$だから, $x$座標は,

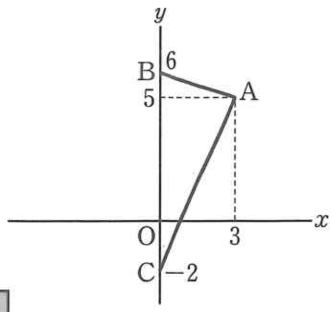
$-t+7=\frac{3}{2}x+7$, $x=-\frac{2}{3}t$

(3)PQ$=t-\left(-\frac{2}{3}t\right)=\frac{5}{3}t$

(4)PS=PQだから, $-t+7=\frac{5}{3}t$, $t=\frac{21}{8}$

## 例題 23 三角形の面積の2等分(2)

図のように，3点A(3, 5)，B(0, 6)，C(0, −2)を頂点とする△ABCがある。原点Oを通り，△ABCの面積を2等分する直線の式を求めよ。



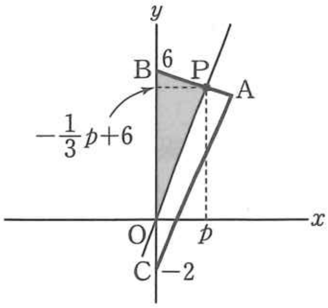

〈解説〉 △ABC$=\frac{1}{2}\times(6+2)\times3=\underline{12}$ ← 面積の半分は6になる

△ABO$=\frac{1}{2}\times6\times3=\underline{9}$ ← △ABCの面積の半分より大きい

よって，原点Oを通り，△ABCの面積を2等分する直線は，線分ABと交わる。直線ABの式は $y=-\frac{1}{3}x+6$ と表されるから，その交点を$\mathrm{P}\left(p,\ -\frac{1}{3}p+6\right)$とすると，

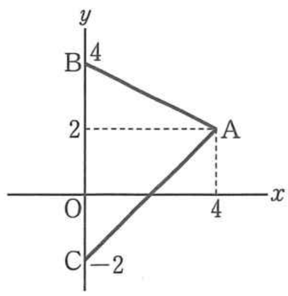
△PBOの面積について，$\frac{1}{2}\times6\times p=6$ より，$p=2$

したがって，$\mathrm{P}\left(2,\ \frac{16}{3}\right)$より，求める直線の式を $y=ax$ として，点Pの座標を代入すると，$\frac{16}{3}=2a$，$a=\frac{8}{3}$

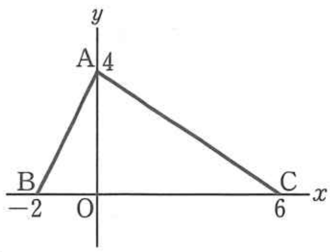



解答 $y=\frac{8}{3}x$

**1** 図のように，3点A(4, 2)，B(0, 4)，C(0, −2)を頂点とする△ABCがある。原点Oを通り，△ABCの面積を2等分する直線の式を求めよ。



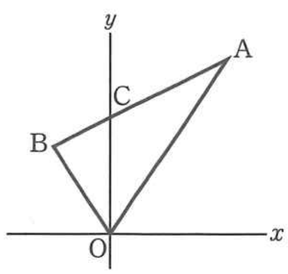

**2** 図のように，3点A(0, 4)，B(−2, 0)，C(6, 0)を頂点とする△ABCがある。原点Oを通り，△ABCの面積を2等分する直線の式を求めよ。




**3** 図で，2点A，Bの座標は，A(4, 6)，B(−2, 3)である。直線ABと $y$ 軸との交点をCとする。

(1) △ABOの面積を求めよ。

(2) 点Cを通り，△ABOの面積を2等分する直線の式を求めよ。



# 15 １次関数のグラフと図形(2)

p.104〜109

p.104

**1** 3：1

**2** 3：7

**3** (1) 2：5 (2) 2：3

●解説●

**1** 直線ABの式は，$y=-x+8$ より，この式と $y=\frac{1}{3}x$ を連立方程式として解いて，P(6, 2)

よって，△AOB：△POB＝6：2＝3：1

**2** △AOBと△AOCの面積の比は，底辺OBとOCの比に等しい。

$y=x+3$ より，B(−3, 0)

直線 $\ell$ の式は，$y=-x+7$ より，C(7, 0)

よって，OB：OC＝3：7

**3** (1) A(4, 2)，$B\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$ である。

△OBC：△OAC＝(Bの $x$ 座標)：(Aの $x$ 座標)

だから，$\frac{8}{5}$：4＝2：5

(2) △OBC：△OAB

＝△OBC：(△OAC−△OBC)

＝2：(5−2)＝2：3

p.105

**1** (1) $y=-3x+3$ (2) $y=-\frac{3}{8}x+3$

**2** (1) $y=-\frac{1}{3}x$ (2) $y=\frac{5}{3}x-10$

**3** (1) A(6, 2)，B(−2, 6)

(2) $y=-\frac{1}{7}x+\frac{20}{7}$

●解説●

**1** (1) A(−2, 9)とBCの中点(1, 0)を通る。

(2) C(8, 0)とABの中点$\left(-4, \frac{9}{2}\right)$を通る。

**2** (1) B(9, −3)とACの中点(3, −1)を通る。

(2) C(6, 0)とABの中点$\left(\frac{9}{2}, -\frac{5}{2}\right)$を通る。

**3** (1) $\begin{cases} y=\frac{1}{3}x \\ y=-\frac{1}{2}x+5 \end{cases}$ と $\begin{cases} y=-3x \\ y=-\frac{1}{2}x+5 \end{cases}$ を解く。

(2) A(6, 2)とOBの中点(−1, 3)を通る。

p.106

**1** $y=\frac{5}{6}x$

**2** $y=\frac{4}{3}x$

**3** (1) 12 (2) $y=-\frac{5}{2}x+4$

●解説●

**1** 求める直線と直線ABとの交点をPとする。

直線ABの式は，$y=-\frac{1}{2}x+4$ より，点Pの $x$ 座標を $p$ とすると，$P\left(p, -\frac{1}{2}p+4\right)$

よって，$\triangle PBO=\frac{1}{2}\triangle ABC$ の関係から，

$\frac{1}{2}\times4\times p=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times6\times4\right)$

これを解いて，$p=3$

求める直線 $y=ax$ は，$P\left(3, \frac{5}{2}\right)$ を通る。

**2** 求める直線と直線ACとの交点をPとする。

直線ACの式は，$y=-\frac{2}{3}x+4$ より，点Pの $x$ 座標を $p$ とすると，$P\left(p, -\frac{2}{3}p+4\right)$

よって，$\triangle POC=\frac{1}{2}\triangle ABC$ の関係から，

$\frac{1}{2}\times6\times\left(-\frac{2}{3}p+4\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times8\times4\right)$

これを解いて，$p=2$

求める直線 $y=ax$ は，$P\left(2, \frac{8}{3}\right)$ を通る。

**3** (1) 直線ABの式は，$y=\frac{1}{2}x+4$ より，C(0, 4)

よって，$\triangle ABO=\frac{1}{2}\times4\times4+\frac{1}{2}\times4\times2=12$

(2) 求める直線と直線AOとの交点をPとする。

直線AOの式は，$y=\frac{3}{2}x$ より，点Pの $x$ 座標を $p$ とすると，$P\left(p, \frac{3}{2}p\right)$

よって，△ACP＝△ACO−△PCO

$=\frac{1}{2}\times4\times4-\frac{1}{2}\times4\times p=8-2p$ と表されるから，$\triangle ACP=\frac{1}{2}\triangle ABO$ の関係より，

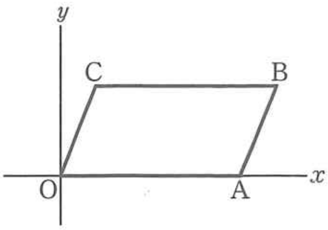
$8-2p=\frac{1}{2}\times12$ これを解いて，$p=1$

したがって，C(0, 4)，$P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ を通る直線の式を求めればよい。

**ポイント** 平行四辺形の対角線の交点を通る直線は，平行四辺形の面積を 2 等分する。

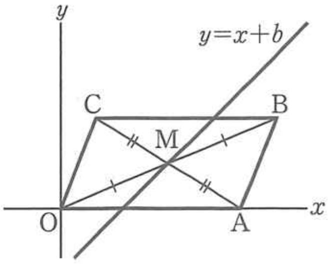
## 例題 24　平行四辺形の面積の2等分

図で，四角形 OABC は平行四辺形で，3 点 A，B，C の座標は，A(10, 0)，B(12, 5)，C(2, 5) である。直線 $y=x+b$ が平行四辺形 OABC の面積を 2 等分するとき，$b$ の値を求めよ。




〈解説〉 直線 $y=x+b$ は，平行四辺形 OABC の対角線 AC と OB の交点Mを通る。点Mは対角線 OB の中点にあたるから，$M\left(6,\ \frac{5}{2}\right)$

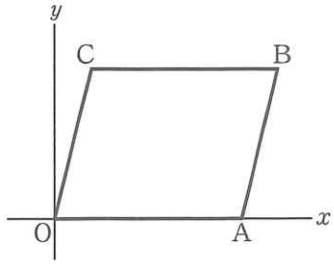
点Mの座標を，求める直線の式に代入して，$\frac{5}{2}=6+b$，$b=-\frac{7}{2}$



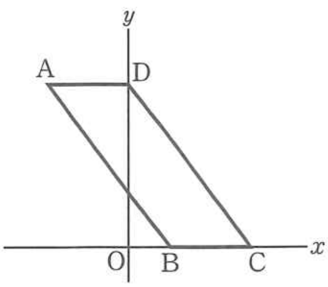

**解答** $b=-\frac{7}{2}$

> **参考** 正方形・長方形・ひし形についても同様に，対角線の交点を通る直線は，その図形の面積を 2 等分する。

**1** 図で，四角形OABCは平行四辺形で，3 点A，B，Cの座標は，A(5, 0)，B(6, 4)，C(1, 4)である。直線 $y=x+b$ が平行四辺形OABCの面積を 2 等分するとき，$b$ の値を求めよ。

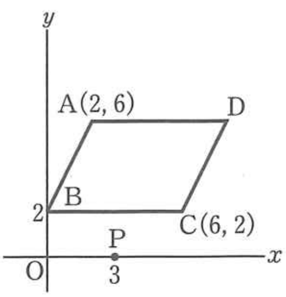



**2** 図で，四角形 ABCD は平行四辺形である。点Aの座標は(−4, 8)，点Cの $x$ 座標は 6 である。原点Oを通り，平行四辺形 ABCD の面積を 2 等分する直線の式を求めよ。

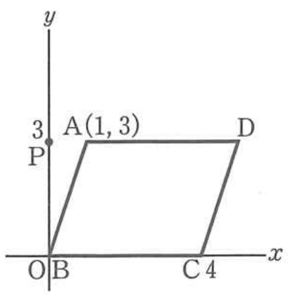



**3** 図で，四角形 ABCD は平行四辺形である。点Pを通り，平行四辺形 ABCD の面積を 2 等分する直線の式を求めよ。

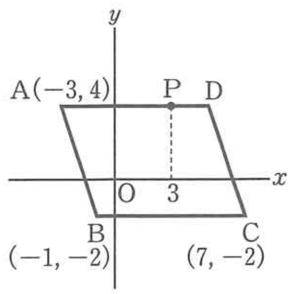
(1)




(2)

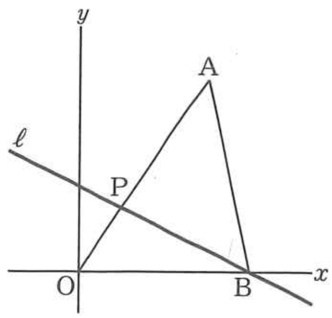



(3)



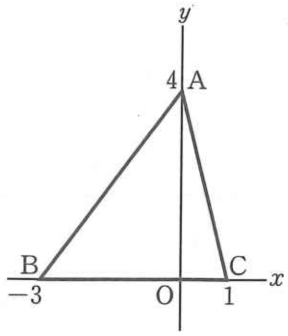
# 練習問題

**1** 図で，△AOB の頂点A，Bの座標はA(6, 9)，B(8, 0)である。直線$\ell$は，点Bを通る傾きが$-\frac{1}{2}$の直線であり，線分 AO との交点をPとする。△AOB と△POB の面積の比を求めよ。 ➡例題21

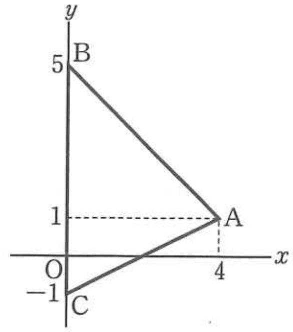



**2** 図で，頂点Aを通り，△ABC の面積を 2 等分する直線の式を求めよ。 ➡例題22

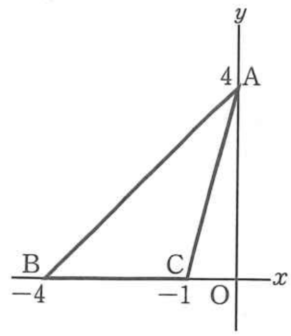
(1)



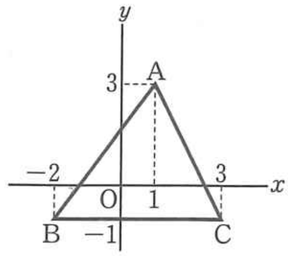

(2)



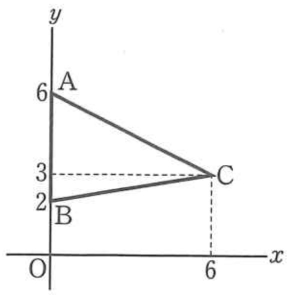

(3)



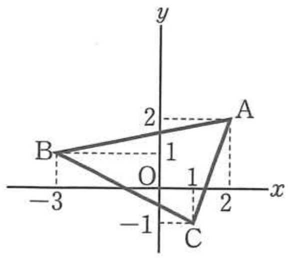

(4)



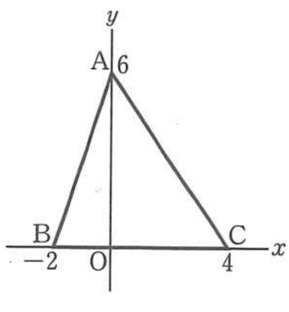

(5)



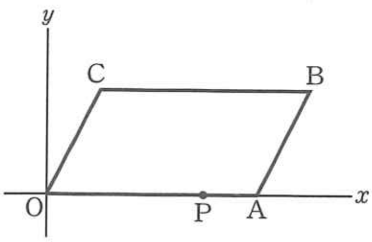

(6)




**3** 図のように，3 点A(0, 6)，B(−2, 0)，C(4, 0)を頂点とする△ABCがある。原点Oを通り，△ABCの面積を 2 等分する直線の式を求めよ。 ➡例題23




**4** 図で，四角形OABCは平行四辺形で，3 点A，B，Cの座標は，A(8, 0)，B(10, 4)，C(2, 4)である。点P(6, 0)を通り，平行四辺形OABCの面積を 2 等分する直線の式を求めよ。 ➡例題24



## p.107

**1**　$b=-1$

**2**　$y=4x$

**3** (1)　$y=4x-12$　　(2)　$y=-\frac{3}{5}x+3$

(3)　$y=3x-5$

●解説●

**1**　直線 $y=x+b$ は，OBの中点(3, 2)を通る。

**2**　求める直線 $y=ax$ は，ACの中点(1, 4)を通る。

**3**　求める直線は，次の 2 点を通る。

(1)　P(3, 0)とACの中点(4, 4)

(2)　P(0, 3)とACの中点$\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

(3)　P(3, 4)とACの中点(2, 1)

## p.108　練習問題

**1**　3 : 1

**2** (1)　$y=4x+4$　　(2)　$y=-\frac{1}{4}x+2$

(3)　$y=\frac{8}{5}x+4$　　(4)　$y=8x-5$

(5)　$y=-\frac{7}{6}x+6$　　(6)　$y=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$

**3**　$y=\frac{9}{2}x$

**4**　$y=-2x+12$

●解説●

**1**　$\begin{cases} y=\frac{3}{2}x \\ y=-\frac{1}{2}x+4 \end{cases}$ を解いて，P(2, 3)

よって，△AOB : △POB＝9 : 3＝3 : 1

**2**　BCの中点の座標は，次のようになる。

(1)　(−1, 0)　　(2)　(0, 2)

(3)　$\left(-\frac{5}{2},\ 0\right)$　　(4)　$\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$

(5)　$\left(3,\ \frac{5}{2}\right)$　　(6)　(−1, 0)

**3**　直線ACの式は，$y=-\frac{3}{2}x+6$ より，求める直線と直線ACとの交点を$P\left(p,\ -\frac{3}{2}p+6\right)$とする。

$\triangle POC=\frac{1}{2}\triangle ABC$の関係から，

$\frac{1}{2}\times4\times\left(-\frac{3}{2}p+6\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times6\times6\right)$

これを解いて，$p=1$ より，$P\left(1,\ \frac{9}{2}\right)$

**4**　求める直線は，OBの中点(5, 2)を通る。

## p.109　実戦問題

**1** (1)　$y=-\frac{1}{4}x+6$　　(2)　(6, 3)

(3)　$\frac{84}{5}$

**2**　$y=\frac{1}{4}x+3$

**3** (1)　(6, 6)

(2)①　$b=-3$　　②　12

(3)　$b=-\frac{3}{2}$　　(4)　$b=\frac{9}{2}$

●解説●

**1** (2)　△AOP : △AOB＝3 : 4 となるから，点Pの $x$ 座標と点Bの $x$ 座標の比も 3 : 4 になる。

(3)　直線 $m$ の式は，$y=-2x+6$…①

点Pの座標は，①と直線 $\ell$ の式を連立方程式として解いて，$P\left(\frac{12}{5},\ \frac{6}{5}\right)$

△APB＝△AOB－△AOP

$=\frac{1}{2}\times6\times8-\frac{1}{2}\times6\times\frac{12}{5}=\frac{84}{5}$

**2**　$\frac{1}{2}\triangle AOB=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times6\times12\right)=18$

直線ABの式は，$y=-2x+12$ より，求める直線と直線ABとの交点を$P(p,\ -2p+12)$とする。

△ACPの面積について，

$\frac{1}{2}\times(12-3)\times p=18$

これを解いて，$p=4$ より，P(4, 4)

**3** (3)　直線 $\ell$ はOBの中点(3, 3)を通る。

$3=\frac{3}{2}\times3+b,\ b=-\frac{3}{2}$

(4)　2 点P，Qの $x$ 座標は，

P　$0=\frac{3}{2}x+b$ より，$x=-\frac{2}{3}b$

Q　$6=\frac{3}{2}x+b$ より，$x=4-\frac{2}{3}b$

したがって，$-3\leqq b\leqq0$ のとき，

$OP+BQ=-\frac{2}{3}b+\left\{6-\left(4-\frac{2}{3}b\right)\right\}=2$

OP＋BQ＝8 になることはない。

$0\leqq b\leqq6$　のとき，

$OP+BQ=\frac{2}{3}b+\left\{6-\left(4-\frac{2}{3}b\right)\right\}=2+\frac{4}{3}b$

よって，$2+\frac{4}{3}b=8$ より，$b=\frac{9}{2}$